CS 02 1ère Spé maths **Jeudi 13 Février 2024** **Thiaude P.**
Durée 50 minutes **Calculatrice en mode Examen**

<u>Exercice 1</u> [15 points]

Une étude sur le nombre de clients d'une entreprise montre que :

- d'une année sur l'autre le nombre de client baisse de 20%,
- grâce à une campagne de publicité, le 31 décembre de chaque année l'entreprise gagne 25 000 nouveaux clients.

Au 1er janvier 2020 l'entreprise possède 200 000 clients.
On note (u_n) la suite qui modélise le nombre de milliers de clients au 1er Janvier de l'année $(2020+n)$; ainsi $u_0 = 200$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 25$.

2. Déterminer u_1 et u_2 : (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

3. Le programme Python suivant demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n puis affiche la valeur de u_n :

```
01 U=200
02 n=int(input("n="))
03 for k in range(0, …
04      U= …
05 print(U)
```

Écrire <u>sur la copie</u>, en les complétant, les ligne 03 et 04.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 125$.

a. Déterminer v_0.

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) : que peut-on en déduire pour le nombre de clients de cette entreprise ?

6. L'entreprise réalise des bénéfices si, et seulement si, elle possède au moins 120 000 clients : va-t-elle toujours réaliser des bénéfices.

<u>Exercice 2</u> [5 points]

On pose $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + 4n + 5$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2n^2$.

1. Démontrer que (v_n) est arithmétique, préciser son premier terme et sa raison.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Déterminer un entier naturel n, au choix, pour lequel $u_n > 2 \times 10^{300}$.

<u>BONUS</u> [2 points]**

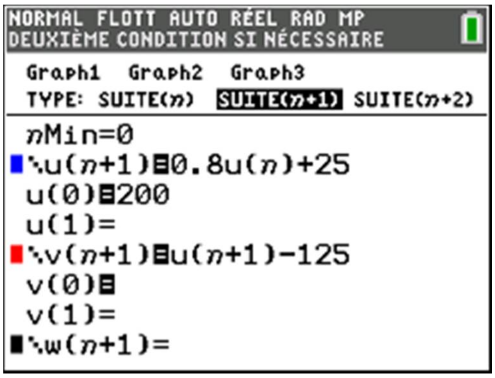
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ la somme des termes de u_1 à u_n avec :

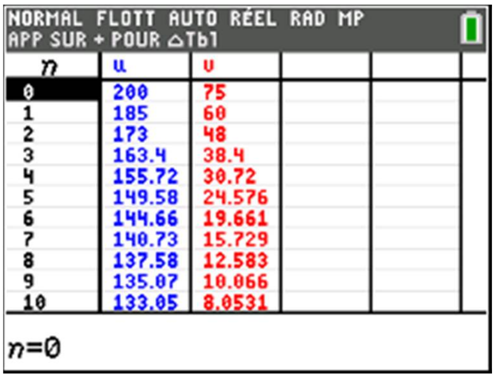
$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n < 2$.

Corrigé

Exercice 1





— d'une année sur l'autre le nombre de client baisse de 20%

— le 31 décembre de chaque année l'entreprise gagne 25 000 nouveaux clients

Au 1er janvier 2020 : 200 000 clients

(u_n) modélise le nombre de milliers de clients au 1er Janvier de l'année (2020+n), u_0 =200

1. **Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 25$.**
   On se place au début de l'année 2000+n : il y a u_n milliers de clients.
   • lors de cette année, l'entreprise perd 20% de ses clients, soit $\frac{20}{100}u_n = 0{,}2u_n$ milliers de clients, donc il restera $u_n - 0{,}2u_n = 0{,}8u_n$ milliers de clients.
   • le 31 décembre 25 000 nouveaux clients arrivent soit 25 milliers de clients donc l'entreprise aura $0{,}8u_n + 25$ milliers de clients au 1er janvier 2000+n.
   Or, au 1er janvier 2000+$n+1$ le nombre de clients en milliers est u_{n+1} donc : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 25$.
   Conclusion : **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 25$**.

2. **Déterminer u_1 et u_2 : (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?**
   $u_1 = 0{,}8u_0 + 25 = 0{,}8 \times 200 + 25 = 160 + 25 = 185$
   $u_2 = 0{,}8u_1 + 25 = 0{,}8 \times 185 + 25 = 148 + 25 = 173$
   Résumons : $\boldsymbol{u_1 = 185}$ et $\boldsymbol{u_2 = 173}$.

   On a : $u_1 - u_0 = 200 - 185 = 15$ et $u_2 - u_1 = 185 - 173 = 12$.
   On constate que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   On a : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{185}{200} = \frac{37}{40}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{173}{185}$
   On constate que : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
   Conclusion : la suite (u_n) **n'est ni arithmétique, ni géométrique**.

3. **Le programme Python suivant demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n puis affiche la valeur de u_n :**
```
for k in range(0,n):
     U=0.8*U+25
```

4. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 125$
   a. **Déterminer v_0.**
   Pour $n = 0$ on obtient : $v_0 = u_0 - 125 = 200 - 125 = 75$; $\boldsymbol{v_0 = 75}$.
   b. **Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 125 = 0{,}8u_n + 25 - 125 = 0{,}8u_n - 100 = 0{,}8\left(u_n - \frac{100}{0{,}8}\right)$$
   $$= 0{,}8(u_n - 125) = 0{,}8 \times v_n$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n$ et 0,8 est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

Autre rédaction (tolérée en première uniquement) :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 125}{u_n - 125} = \frac{0{,}8u_n + 25 - 125}{u_n - 125} = \frac{0{,}8u_n - 100}{u_n - 125} = \frac{0{,}8\left(u_n - \frac{100}{0{,}8}\right)}{u_n - 125}$$
$$= \frac{0{,}8(u_n - 125)}{u_n - 125} = 0{,}8$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}8$ et 0,8 est une constante donc (v_n) est géométrique de raison 0,8.

c. v_n puis u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que (v_n) est géométrique donc : $v_n = v_0 \times q^n$ (cours), or $v_0 = 75$ et $q = 0{,}8$ donc : $v_n = 75 \times 0{,}8^n$. Or, $v_n = u_n - 125$ donc $75 \times 0{,}8^n = u_n - 125$, autrement dit : $u_n = 75 \times 0{,}8^n + 125$.

Conclusion : **pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 75 \times 0{,}8^n + 125$.**

5. Déterminer le sens de variation de (u_n) et conséquence pour le nombre de clients.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} - u_n = 75 \times 0{,}8^{n+1} + 125 - (75 \times 0{,}8^n + 125) = 75 \times 0{,}8^n \times 0{,}8 - 75 \times 0{,}8^n \times 1$
$= 75 \times 0{,}8^n \times (0{,}8 - 1) = -0{,}2 \times 75 \times 0{,}8^n = -15 \times 0{,}8^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -15 \times 0{,}8^n$.
Or, $-15 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, 0{,}8^n > 0$ donc : $-15 \times 0{,}8^n < 0$, autrement dit : $u_{n+1} - u_n < 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est (strictement) décroissante.
Conséquence : **le nombre de clients va toujours diminuer d'une année sur l'autre**.

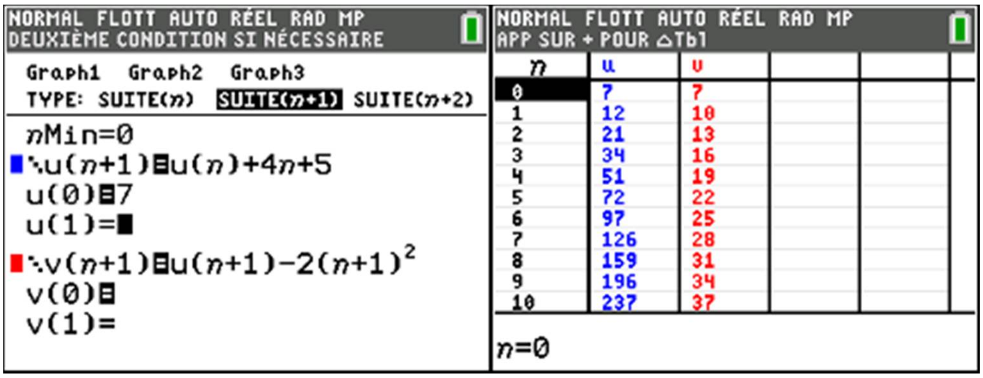
6. L'entreprise réalise des bénéfices si, et seulement si, elle possède au moins 120 000 clients : va-t-elle toujours réaliser des bénéfices.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0{,}8^n > 0$ et $75 > 0$ donc $75 \times 0{,}8^n > 0$ puis en ajoutant 125 à chaque membre : $75 \times 0{,}8^n + 125 > 125$, c'est-à-dire : $u_n > 125$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 125$ donc le nombre de clients ne descendra jamais en dessous de 125 000 et comme $125\,000 > 120\,000$ on en déduit que **l'entreprise réalisera toujours des bénéfices**.

Exercice 2

$u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4n + 5, v_n = u_n - 2n^2$.



1. Démontrer que (v_n) est arithmétique, préciser son premier terme et sa raison.

$v_0 = u_0 - 2(0)^2 = 7 - 0 = 7$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$v_{n+1} - v_n$
$= u_{n+1} - 2(n+1)^2 - (u_n - 2n^2)$
$= u_n + 4n + 5 - 2(n^2 + 2n + 1) - u_n + 2n^2$
$= u_n + 4n + 5 - 2n^2 - 4n - 2 - u_n + 2n^2$
$= 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 3$ et 3 est une constante donc (v_n) est arithmétique de raison 3.

Conclusion

La suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 7$.

2. **Exprimer v_n en fonction de n.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 + nr\ (cours)$, or $v_0 = 7$ et $r = 3$ donc $v_n = 7 + 3n$.
   Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n = 3n + 7}$.

3. **En déduire u_n en fonction de n.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a : $v_n = u_n - 2n^2$, or on a montré en **b.** que $v_n = 3n + 7$, donc $3n + 7 = u_n - 2n^2$, autrement dit : $3n + 7 + 2n^2 = u_n$.
   Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = 2n^2 + 3n + 7}$.

   Vérification
   Pour $n = 2$, la formule donne : $u_2 = 2(2)^2 + 3(2) + 7 = 2 \times 4 + 6 + 7 = 8 + 6 + 7 = 21$ ✓

4. **Déterminer un entier naturel n, au choix, pour lequel : $u_n > 2 \times 10^{300}$.**
   Méthode 1
   On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = 2p^2 + 3p + 7 = p + 2p^2 + 2p + 7 > p$.
   Si $p \geqslant 2 \times 10^{300}$, alors $u_p > p \geqslant 2 \times 10^{300}$ $u_p > 2 \times 10^{300}$ donc $\boldsymbol{n = 2 \times 10^{300}}$ **convient**.

   Méthode 2
   Posons $n = 10^{150}$, alors $n^2 = (10^{150})^2 = 10^{150\times 2} = 10^{300}$ donc $2n^2 > 2 \times 10^{300}$.
   Or, $u_n = 2n^2 + 3n + 7 > 2n^2$ donc $u_n > 2 \times 10^{300}$.
   Conclusion : $\boldsymbol{n = 10^{150}}$ **convient**.

   D'autres méthodes sont possibles.

BONUS

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$on note $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ la somme des termes de u_1 à u_n avec :

$$\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n < 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et :

$$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$$

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{S_n < 2}$.